～円～

§１　円周角の定理
§２　円周角の定理の活用

$\boxed{1}$ 円周角の定理

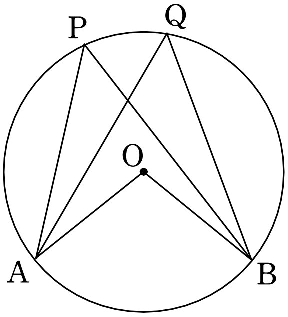
円周角の定理

① 1つの弧に対する円周角の大きさは，その弧に対する中心角の大きさの $\dfrac{1}{2}$ である。

$$\angle \mathrm{APB} = \frac{1}{2} \times \angle \mathrm{AOB}$$

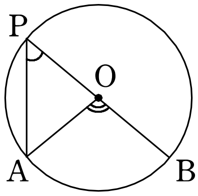
② 1つの弧に対する円周角の大きさはすべて等しい。

$$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$$

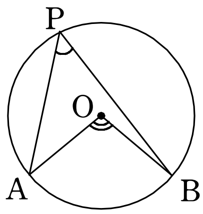


円Oの中心角∠AOBと円周角∠APBの位置関係は，次の(ⅰ)〜(ⅲ)の場合に分けることができる。

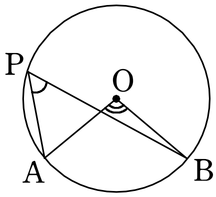
(ⅰ) 中心Oが∠AOBの辺上にある



(ⅱ) 中心Oが∠APBの内部にある

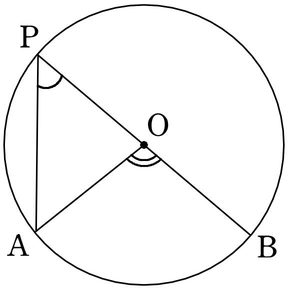


(ⅲ) 中心Oが∠APBの外部にある



(ⅰ)〜(ⅲ)の場合について，$\angle \mathrm{APB} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}$ であることを示せば，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角はすべて等しいことも証明されたことになる。

＜円周角の定理の証明＞ 空欄 $\boxed{(1)}$ 〜 $\boxed{(3)}$ をうめなさい。



(ⅰ) 左図において，∠AOBは△OAPの外角なので

$\angle \mathrm{AOB} = \angle \mathrm{APO} + \angle\ \boxed{(1)}$ ……①

OA，OPは円の半径であるから

$\mathrm{OA} = \mathrm{OP}$

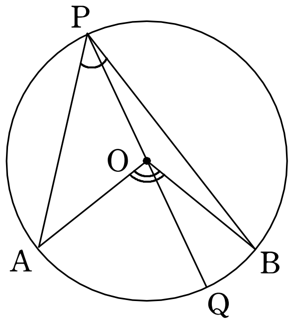
よって，△OAPは二等辺三角形であり

$\angle \mathrm{APO} = \angle\ \boxed{(1)}$ ……②

①，②より

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{AOB} &= \angle \mathrm{APO} + \angle \mathrm{APO} \\ &= 2\angle \mathrm{APO} \\ &= 2\angle \mathrm{APB}\end{aligned}$$

よって，$\angle \mathrm{APB} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}$



（ii） 左図において，∠AOQ は △OAP の外角なので

∠AOQ＝∠APO＋∠PAO ……①

OA，OP は円の半径であるから

OA＝OP

よって，△OAP は二等辺三角形であり

∠APO＝∠PAO ……②

①，② より

∠AOQ＝∠APO＋∠APO

＝2∠APO ……③

同様に

∠BOQ＝2∠ $\boxed{(2)}$ ……④

また，

∠APB＝∠APO＋∠ $\boxed{(2)}$ ……⑤

③～⑤より

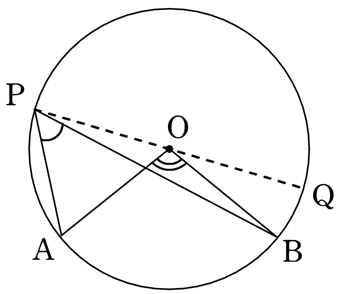
∠AOB＝∠AOQ＋∠BOQ

＝2∠APO＋2∠ $\boxed{(2)}$

＝2(∠APO＋∠ $\boxed{(2)}$)

＝2∠APB

よって，∠APB＝ $\frac{1}{2}$ ∠AOB



（iii） 左図において，

∠AOB＝∠AOQ－∠BOQ …①

∠AOQ は △OAP の外角なので

∠AOQ＝∠OAP＋∠OPA …②

OP，OA は円の半径であるから

OP＝OA

よって，△OAP は二等辺三角形であり

∠OAP＝∠OPA …③

②，③ より

∠AOQ＝2∠OPA …④

同様に，

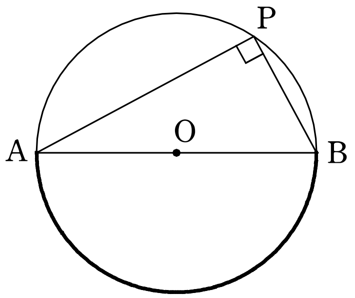
∠BOQ＝2∠ $\boxed{(3)}$ …⑤

①，④，⑤ より

∠AOB＝2(∠OPA－∠ $\boxed{(3)}$)

＝2∠APB

よって，∠APB＝ $\frac{1}{2}$ ∠AOB



半円の弧に対する円周角は 90° である。
→　AB が直径のとき，∠APB＝90°

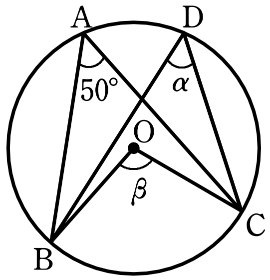
＜証明＞

円周角の定理より

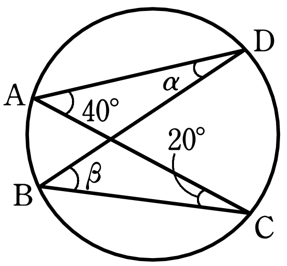
$$\angle \mathrm{APB} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{AOB} = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$$

$\boxed{問１}$　下の図において，円周角の定理を用いて，角 α，β を求めなさい。ただし，O は円の中心とします。

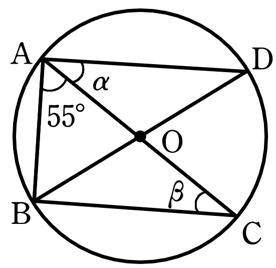
(1)



(2)

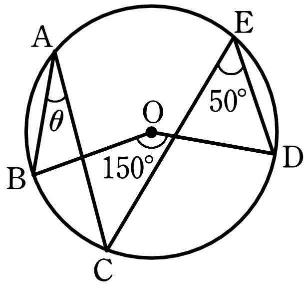


(3)

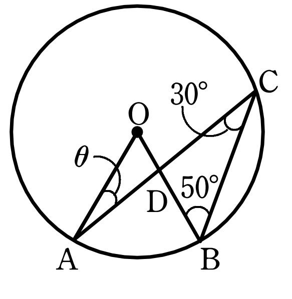


$\boxed{問２}$　下の図において，円周角の定理を用いて，角 θ を求めなさい。ただし，O は円の中心とします。

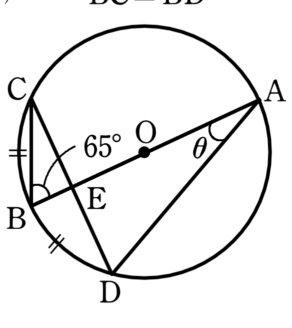
(1)



(2)



(3)　$\overset{\frown}{\mathrm{BC}} = \overset{\frown}{\mathrm{BD}}$

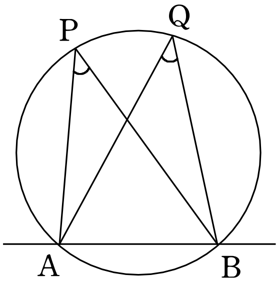


円周角の定理の逆

2点P，Qが直線ABについて
同じ側にあるとき

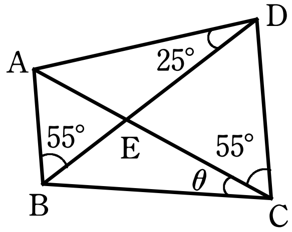
$$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$$

ならば，この4点A，B，P，Qは
1つの円周上にある。

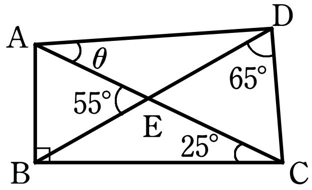


問3　下の図において，円周角の定理の逆を用いて，角 θ を求めなさい。

(1)



(2)



～三平方の定理～

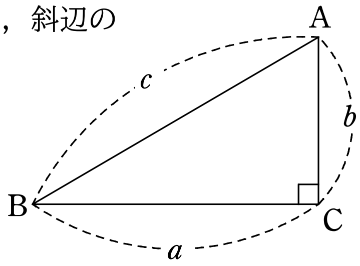
§１　三平方の定理
§２　三平方の定理の活用

§1　三平方の定理

三平方の定理

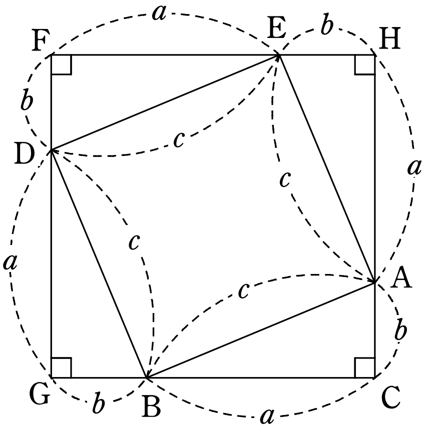
直角三角形の直角をはさむ 2 辺の長さを a，b，斜辺の長さを c とすると，次の関係が成り立つ。

$$a^2+b^2=c^2$$



＜三平方の定理の証明＞　空欄 $\boxed{(1)}$，$\boxed{(2)}$ をうめなさい。

下図について，△ABC，△BDG，△DEF，△EAH はすべて合同である。



(正方形 AEDB の面積) = (正方形 CHFG の面積)−4×(△ABC の面積)　であり，

正方形 AEDB の面積は c^2，正方形 CHFG の面積は $\boxed{(1)}$，△ABC の面積は

$\boxed{(2)}$ であるから

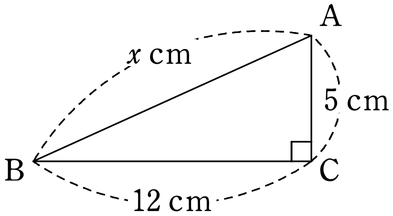
$$c^2=\boxed{(1)}-4\times\boxed{(2)}$$

この等式の右辺を計算すると a^2+b^2 となる。

よって，$a^2+b^2=c^2$

$\boxed{\text{例4}}$ 下図において，x の値を求めなさい。

(1)

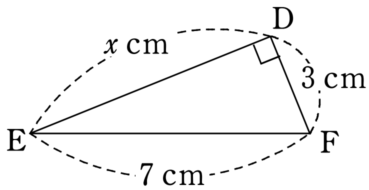


△ABC は直角三角形なので，
三平方の定理より

$$12^2+5^2=x^2$$
$$x^2=169$$

$x>0$ より，$x=13$

(2)



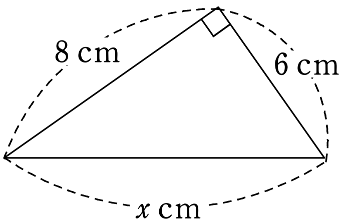
△DEF は直角三角形なので，
三平方の定理より

$$x^2+3^2=7^2$$
$$x^2=40$$

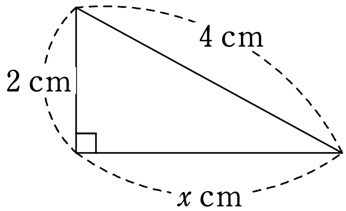
$x>0$ より，$x=2\sqrt{10}$

$\boxed{\text{問4}}$ 下図において，x の値を求めなさい。

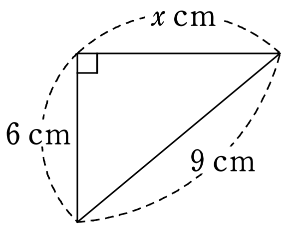
(1)



(2)



(3)

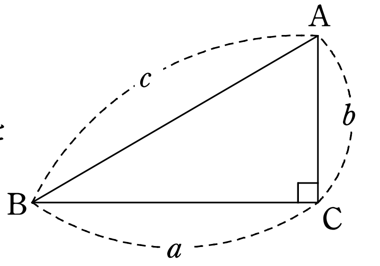


三平方の定理の逆

三角形の 3 辺の長さ a，b，c について

$$a^2+b^2=c^2$$

が成り立つとき，この三角形は長さ c の辺を斜辺とする直角三角形である。



$\boxed{\text{例5}}$ 次の長さを 3 辺とする三角形は，直角三角形といえるかどうか調べなさい。

(1) 7 cm，9 cm，11 cm

$a=7$，$b=9$，$c=11$ とすると

$a^2+b^2=7^2+9^2=130$

$c^2=11^2=121$

よって，$a^2+b^2=c^2$ が成り立たないので，直角三角形ではない

(2) 17 cm，15 cm，8 cm

$a=15$，$b=8$，$c=17$ とすると

$a^2+b^2=15^2+8^2=289$

$c^2=17^2=289$

よって，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つので，直角三角形である

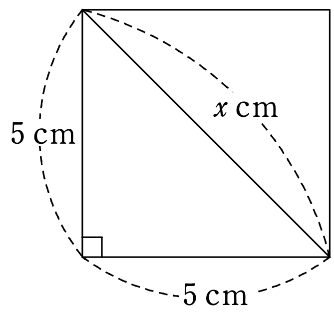
$\boxed{\text{問5}}$ 次の長さを 3 辺とする三角形は，直角三角形といえるかどうか調べなさい。

(1) 4 cm，5 cm，6 cm　　(3) 7 cm，25 cm，24 cm

(3) $\sqrt{2}$ cm，$\sqrt{5}$ cm，$\sqrt{7}$ cm　　(4) 6 cm，$6\sqrt{3}$ cm，12 cm

§２　三平方の定理の活用

$\boxed{例６}$　１辺が５ cm の正方形の対角線の長さを求めなさい。



三平方の定理より

$$x^2 = 5^2 + 5^2$$
$$= 50$$

$x > 0$ より，$x = 5\sqrt{2}$

よって，対角線の長さは $5\sqrt{2}$ cm

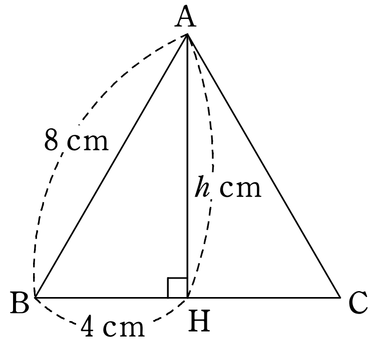
$\boxed{問６}$　次の四角形の対角線の長さを求めなさい。

⑴　１辺が７ cm の正方形

⑵　縦が２ cm，横が３ cm の長方形

⑶　縦が a cm，横が b cm の長方形

$\boxed{例７}$　１辺が８ cm の正三角形の面積を求めなさい。



右の図で，頂点 A から辺 BC に垂線 AH をひくと
H は辺 BC の中点になるから

BH＝4 cm

△ABH は∠AHB＝90° の直角三角形なので，
AH＝ h cm とすると，三平方の定理より

$$4^2 + h^2 = 8^2$$
$$h^2 = 48$$

$h > 0$ より，$h = 4\sqrt{3}$

よって，正三角形の面積は

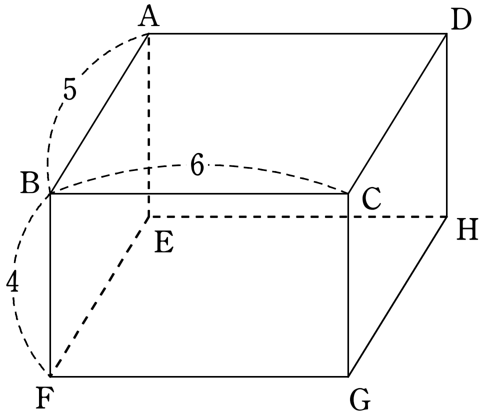
$$\frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$\boxed{問７}$　次の三角形の面積を求めなさい。

⑴　１辺が６ cm の正三角形

⑵　AB＝AC＝7 cm，BC＝10 cm の二等辺三角形

例８　右図の直方体の対角線 BH の長さを求めなさい。



右図で △BCD は∠BCD＝90° の直角三角形であるから，三平方の定理より

$$BD^2 = BC^2 + CD^2$$
$$= 6^2 + 5^2$$
$$= 41$$

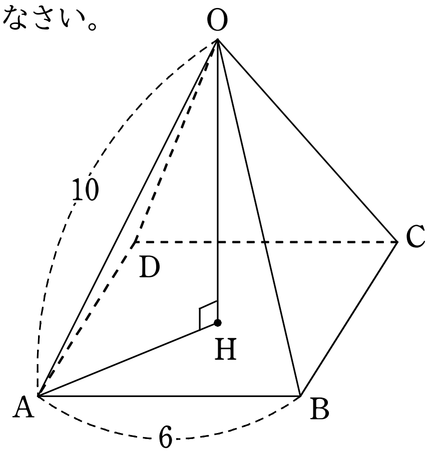
また，△BDH は∠BDH＝90° の直角三角形であるから

$$BH^2 = BD^2 + DH^2$$
$$= 41 + 4^2$$
$$= 57$$

BH＞0 より，$BH = \sqrt{57}$

問８　１辺の長さが 6 cm である立方体の対角線の長さを求めなさい。

例９　右図のような正四角錐 OABCD の体積を求めなさい。



AC は正方形 ABCD の対角線なので

$$AC = \sqrt{2}\,AB = 6\sqrt{2}$$
$$AH = \frac{1}{2}AC = 3\sqrt{2}$$

△OAH は直角三角形なので

$$AH^2 + OH^2 = OA^2$$
$$(3\sqrt{2})^2 + OH^2 = 10^2$$
$$OH^2 = 82$$

OH＞0 より，$OH = \sqrt{82}$

問９　右図のような円錐の体積を求めなさい。